Jméno a Příjmení: Vojtěch Kalčík (xkalci01)	ID: 119943	Téma: 1			1	2	3	Σ

1.4.1

Na množině $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ je dána relace $R = \{(x; y) \mid x, y \in X, 3$ dělí $x - y\}$. Zapište relaci R výčtem prvků. Určete její definiční obor a obor hodnot. Nalezněte relaci R^{-1}.

$X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$R = \{(x,y) \mid x,y \in X$, 3 dělí x-y}

$R=\{(1,1),(1,4),(1,7),(2,2),(2,5),(3,3),(3,6),(4,1),(4,4),(4,7),(5,2),(5,5),(6,3),(6,6),(7,1),(7,4),(7,7)\}$

Dom $R=\{1,2,3,4,5,6,7\}$
Im $R=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

3 dělí 0; x-y = 0 když x=y => relace R je reflexivní => Dom R = X, Im R = X;

$R^{-1}=\{(1,1),(1,4),(1,7),(2,2),(2,5),(3,3),(3,6),(4,1),(4,4),(4,7),(5,2),(5,5),(6,3),(6,6),(7,1),(7,4),(7,7)\}$

Platí x-y =z; y-x=-z. 3 dělí kladné číslo stejně jak záporné => relace R je Symetrická => $R = R^{-1}$

1.4.6

Nechť f(x) = sin x, g(x) = ln x, h(x) = 2x. Stanovte Dom(g o f o h) a Im(g o f o h). Určete (g o f o h)(π/4=4).

f(x) = sin x
g(x) = ln x
h(x) = 2x
(g o f o h) = g(f(h(x))) = ln(sin(2x))

ln x, x ∈(0, ∞), y ∈ (-∞, +∞)
sin x, x ∈ (-∞, +∞), y ∈ <-1, 1>
2x, x ∈ (-∞, +∞), y ∈ (-∞, +∞)

Dom(g o f o h) = $(0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

ln x je definovaná v intervalu (0, ∞) => sin(2x) ∈ (0, 1> v intervalu $(0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

Im(g o f o h) = (-∞, 0>

sin 2x může nebývat hodnot (0, 1>; $\lim_{n\to 0} \ln n = -\infty$, ln 1 = 0 => Im(g o f o h) = (-∞, 0>

$$\sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
ln 1 = 0
(g o f o h)(π/4) = 0

1.5.4

Najděte všechna spojitá zobrazení a všechny homeomorfismy mezi dvěma Serpińského topologickými prostory.

Serpińského topologický prostor (X, τ)
$X = \{0, 1\}$
$\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$

1) $f_1 = \{(0,0),(1,1)\}$
   f_1 je spojité protože $\{0\} \in \tau$ $f_1^{-1}(\{0\}) = \{0\} \in \tau$. Zobrazení je homeomorfismus, protože je identické.
2) $f_2 = \{(0,1),(1,0)\}$
   f_2 spojité není protože $\{0\} \in \tau$ $f_2^{-1}(\{0\}) = \{1\} \notin \tau$, takže není ani homeomorfismus.
3) $f_3 = \{(0,0),(1,0)\}$
   f_3 je spojité protože $\{0\} \in \tau$ $f_3^{-1}(\{0\}) = \{0\} \in \tau$. Zobrazení není homeomorfismus, protože je f_3^{-1} není zobrazení.
4) $f_4 = \{(0,1),(1,1)\}$
   f_4 spojité není protože $\{0\} \in \tau$ $f_4^{-1}(\{0\}) = \{1\} \notin \tau$, takže není ani homeomorfismus.

Jméno a Příjmení: Vojtěch Kalčík (xkalci01)	ID: 119943	Téma: 2			1	2	3	Σ

1.6.2

K rozkladům množiny $X = \{1, 2, 3, 4\}$ najděte odpovídající ekvivalence na X.

Aby relace byla ekvivalentní musí být symetrická, reflexivní a tranzitivní.

1) {{1,2},{3,4}}
   R = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)}
2) {{1},{2},{3,4}}
   R = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(3,4),(4,3)}
3) {{1,2,3},{4}}
   R = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3),(1,3),(2,1),(3,2),(3,1)}
4) {{1,2,3,4}}
   R = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,3),(3,4),(1,3),(2,4),(1,4),(2,1),(3,2),(4,3),(3,1),(4,2),(4,1)}

1.6.8

Nechť R je reflexivní a tranzitivní relace na X. Dokažte, že $R \cap R^{-1}$ je ekvivalence na X.

Konkrétní případ:
X = {1, 2, 3, 4}
R = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2) ,(2,1),(2,3),(1,3) }
R^{-1} = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) ,(2,1),(1,2),(3,2),(3,1)}
$R \cap R^{-1}$ = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) ,(2,1),(1,2)}

Obecné řešení:
X, *R*
Podmínky *R*:
Platí pro všechna *x*, *y* a *z* náležící do *X*, že (*x*,*x*) náleži do relace *R* a zároveň platí, že pokud patří do relace *R* (*x*, *y*) a teké (*y*, *z*) potom musí patřit i (*x*, *z*).
$\forall(x, x) \in R \wedge ([(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R] \Rightarrow (x,z) \in R)$
Podmínky R^{-1}:
(*x*,*y*) náleží do R^{-1} právě když (*y*,*x*) náleži do R.
$(x,y) \in R \iff (y,x) \in R$
$R_p = R \cap R^{-1}$:
Z výše uvedených podmínek vyplývá, že do R_p náleží (*x*,*y*) pouze v případě že do R náleží (*x*,*y*) a zároveň (*y*,*x*). Tím pádem pokud náleží do R_p (*x*,*y*), náleží tam i (*y*,*x*). Z toho vyplývá, že R_p je **symetrická** relace. R_p Musí být i **reflexivní**, protože $(x,x)^{-1} = (x,x)$ z toho vyplývá, že všechna (x,x) patří do R_p. Pokud náleží do *R* (*x*,*y*), (*y*,*z*) a (*x*,*z*), tak aby to samé náleželo i do R_p, musí do *R* náležet zároveň i (*y*,*x*), (y,*z*) a (*z*,*x*) z toho vyplývá, že pokud R je tranzitivní musí být **tranzitivní** i R_p a tím jsou splněny všechny podmínky pro to aby R_p byla **ekvivalence**.

1.6.9

Dokažte nebo vyvraťte protipříkladem pro libovolné dvě relaci R_1, R_2 na množině X:

$\rho(R_1 \cup R_2) = \rho(R_1) \cup \rho(R_2)$:

aby platilo, že relace jsou reflexivní, tak musí obsahovat všechna (x,x) kde $x \in X$ neboli ΔX.
$\rho(R_1 \cup R_2) = (R_1 \cup R_2) \cup \Delta X = (R_1 \cup R_2) \cup \Delta X \cup \Delta X = (R_1 \cup \Delta X) \cup (R_2 \cup \Delta X) = \rho(R_1) \cup \rho(R_2)$
Z toho vyplává, že tvrzení platí.

$\sigma(R_1 \cap R_2) = \sigma(R_1) \cap \sigma(R_2)$:

Pokud je symetrická relace, tak obsahuje ke každému (x,y) také (y,x). Prázdná množina je symetrická. Průnik dvou symetrických relací může být buď prázdná množina a nebo symetrická relace. Pokud je výsledku průniku nějaké (x_k,y_k), tak muselo být v obou symetrických relacích a pokud v nich bylo, také zároveň v obou muselo být i (y_k, x_k)
$\sigma(R_1 \cap R_2) = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_2)^{-1} = ((x_1,y_1) \cap (x_2,y_2)) \cup ((y_1, x_1) \cap (y_2, x_2))$pokud je průnik, tak se musí $x_1 = x_2 \Rightarrow x_k \Rightarrow (x_k,y_k) \cup (y_k, x_k) = ((x_1,y_1) \cup (y_1, x_1)) \cap ((x_2,y_2) \cup (y_2, x_2)) = (R_1 \cup R_1^{-1}) \cap \sigma(R_2 \cup R_2^{-1}) = \sigma(R_1) \cap \sigma(R_2)$ Z toho vyplývá, že vztah platí.

$\tau(R_1 \cup R_2) = \tau(R_1) \cup \tau(R_2)$:

Například $R_1=\{(1,2)\}$ $R_2=\{(2,3)\}$ obě relace jsou tranzitivní, ale $\tau(R_1) \cup \tau(R_2) = \{(1,2),(2,3)\}$, což není tranzitivní relace, takže $\tau(R_1 \cup R_2) = \{(1,2),(2,3),(1,3)\} \neq (R_1) \cup \tau(R_2)$ => Tvrzení neplatí.

$\tau(R_1 \cap R_2) = \tau(R_1) \cap \tau(R_2)$:

Aby byla relace tranzitivní, tak pokud obsahuje (x,y) a zároveň (y,z), tak musí obsahovat i (x,z). Prázdná množina je tranzitivní. Pokud je průnik dvou tranzitivních relací, tak výsledkem je buď prázdná množina a nebo znovu tranzitivní relace.
$\tau(R_1) \cap \tau(R_2) = ((x1,y1) \cup (y1,z1) \cup (x1,z1)) \cap ((x2,y2) \cup (y2,z2) \cup (x2,z2)) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow x_k \Rightarrow (xk,yk) \cup (yk,zk) \cup (xk,zk) = ((x1,y1) \cup (y1,z1)) \cap ((x2,y2) \cup (y2,z2)) \cup (xk,zk) = \tau(R_1 \cap R_2)$
Tím je dokázáno, že výraz platí.

$\sigma(\tau(R_1)) = \tau(\sigma(R_1))$:

$\sigma(\tau(R_1)) = \sigma((x,y) \cup (y,z) \cup (x,z)) = (x,y) \cup (y,z) \cup (x,z) \cup (y,x) \cup (z,y) \cup (z,x) = ((x,y) \cup (y,z) \cup (y,x) \cup (z,y)) \cup (x,z) \cup (z,x) = \sigma((x,y) \cup (y,z)) \cup (x,z) \cup (z,x) = \tau(\sigma(R_1))$
Z toho vyplývá, že výraz platí.

$\sigma(\rho(R_1)) = \rho(\sigma(R_1))$:

$\sigma(\rho(R_1)) = \sigma(R_1 \cup \Delta X) = (R_1 \cup \Delta X) \cup (R_1 \cup \Delta X)^{-1} = R_1 \cup R_1^{-1} \cup \Delta X = \sigma(R_1) \cup \Delta X = \rho(\sigma(R_1))$
Z toho vyplývá, že výraz platí.

$\rho(\tau(R_1)) = \tau(\rho(R_1))$:

$\rho(\tau(R_1)) = \rho((x,y) \cup (y,z) \cup (x,z)) = (x,y) \cup (y,z) \cup (x,z) \cup \Delta X = ((x,y) \cup (y,z) \cup \Delta X) \cup (x,z) = \rho((x,y) \cup (y,z)) \cup (x,z) = \tau(\rho(R_1))$
Z toho vyplývá, že výraz platí.

Jméno a Příjmení: Vojtěch Kalčík (xkalci01)	ID: 119943	Téma: 3			1	2	3	Σ

2.2.2

Nechť A = {1, 2} a X = 2^A. Najděte všechny podalgebry algebry (X, ∪, ∩).

Musím najít všechny podmnožiny množiny X, na jejíž prvky navzájem mohu aplikovat ∪, ∩ a výsledek bude mezi těmito podmnožinami také.
Podalgebry jsou:
{Ø,{1},{2},{1,2}}
{Ø,{1},{1,2}}
{Ø,{2},{1,2}}
{Ø,{1}}
{Ø,{2}}
{Ø,{1,2}}
{{1},{1,2}}
{{2},{1,2}}
{Ø}
{{1}}
{{2}}
{{1,2}}

Podalgebry nejsou:
{{1},{2}} - protože {1} ∩ {2} = Ø a to není součástí dané podmnožiny.
{Ø,{1},{2}} - protože {1} ∪ {2} = {1, 2} a to není součástí dané podmnožiny.
{{1},{2},{1,2}} - protože {1} ∩ {2} = Ø a to není součástí dané podmnožiny.

2.3.3

Sestrojte faktorovou algebru *A/R* z předchozí úlohy.

Protože se dělí pětkou, tak je 5 tříd.
A/R = {[0],[1],[2],[3],[4]}
[0] = {5k|k∈ ℤ}
[1] = {5k+1|k∈ ℤ}
[2] = {5k+2|k∈ ℤ}
[3] = {5k+3|k∈ ℤ}
[4] = {5k+4|k∈ ℤ}

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

x	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[0]	[4]	[3]	[2]	[1]

2.3.4

Položme X = {0,1,2,3,4,5} a Y ={0,1,2}. Dále klademe $x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2) \bmod 6$, $x_1 \odot x_2 = (x_1 \cdot x_2) \bmod 6$, $y_1 \boxplus y_2 = (y_1 + y_2) \bmod 3$ a $y_1 \boxdot y_2 = (y_1 \cdot y_2) \bmod 3$ pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$. Dokažte, že $f : X \to Y$, kde $f(x) = x \bmod 3$ je morfismus algeber $(X,\oplus,\odot)$ a $(Y, \boxplus,\boxdot)$.

Je třeba dokázat: $f(x_1 \oplus x_2) = f(x_1)\boxplus f(x_2)$

$f(x_1 \oplus x_2) = f[(x_1 + x_2) \bmod 6] = [(x_1 + x_2) \bmod 6] \bmod 3$
$x_1 = 6k_1 + z_1 \mid z_1 = \{0,1,2,3,4,5\}$
$x_2 = 6k_2 + z_2 \mid z_2 = \{0,1,2,3,4,5\}$
$(6k_1 + z_1 + 6k_2 + z_2) = (6(k_1 + k_2) + z_1 + z_2)$
$(6\cdot(k_1 + k_2) + z_1 + z_2) \bmod 6 = (z_1 + z_2)$
Podle věty o dělení s zbytkem můžeme upravit:
$(z_1 + z_2) \bmod 3 = ((z_1) \bmod 3 + (z_2) \bmod 3) \bmod 3$
$f(x_1 \oplus x_2) = ((z_1) \bmod 3 + (z_2) \bmod 3) \bmod 3$

$f(x_1)\boxplus f(x_2) = [f(x_1) + f(x_2)] \bmod 3 = [(x_1) \bmod 3 + (x_2) \bmod 3] \bmod 3$
Je třeba dokázat, že $(x_1) \bmod 3 = (z_1) \bmod 3 \wedge (x_2) \bmod 3 = (z_2) \bmod 3$

(6k)mod 6 = 0;	0 mod 3 = 0;	(6k)mod 3 = 0
(6k+1)mod 6 = 1;	1 mod 3 = 1;	(6k+1)mod 3 = 1
(6k+2)mod 6 = 2;	2 mod 3 = 2;	(6k+2)mod 3 = 2
(6k+3)mod 6 = 3;	3 mod 3 = 0;	(6k+3)mod 3 = 0
(6k+4)mod 6 = 4;	4 mod 3 = 1;	(6k+4)mod 3 = 1
(6k+5)mod 6 = 5;	5 mod 3 = 2;	(6k+5)mod 3 = 2

Z toho vyplývá, že $f(x_1 \oplus x_2) = f(x_1)\boxplus f(x_2)$

Je třeba dokázat: $f(x_1 \odot x_2) = f(x_1)\boxdot f(x_2)$

$f(x_1 \odot x_2) = f[(x_1 \cdot x_2) \bmod 6] = [(x_1 \cdot x_2) \bmod 6] \bmod 3$
$x_1 = 6k_1 + z_1 \mid z_1 = \{0,1,2,3,4,5\}$
$x_2 = 6k_2 + z_2 \mid z_2 = \{0,1,2,3,4,5\}$
$((6k_1 + z_1)\cdot(6k_2 + z_2)) = (36k_1k_2 + 6k_2z_1 + 6k_1z_2 + z_1z_2) = (6\cdot(6k_1k_2 + k_2z_1 + k_1z_2) + z_1z_2)$
$(6\cdot(6k_1k_2 + k_2z_1 + k_1z_2) + z_1z_2) \bmod 6 = (z_1 \cdot z_2)$
Podle věty o dělení s zbytkem můžeme upravit:
$(z_1 \cdot z_2) \bmod 3 = ((z_1) \bmod 3 \cdot (z_2) \bmod 3) \bmod 3$
$f(x_1 \odot x_2) = ((z_1) \bmod 3 + (z_2) \bmod 3) \bmod 3$

$f(x_1)\boxdot f(x_2) = [f(x_1) \cdot f(x_2)] \bmod 3 = [(x_1) \bmod 3 \cdot (x_2) \bmod 3] \bmod 3$
Výše bylo dokázáno, že $(x_1) \bmod 3 = (z_1) \bmod 3 \wedge (x_2) \bmod 3 = (z_2) \bmod 3$
Z toho vyplývá, že $f(x_1 \odot x_2) = f(x_1)\boxdot f(x_2)$

Jméno a Příjmení: Vojtěch Kalčík (xkalci01)	ID: 119943	Téma: 4			1	2	3	Σ

2.8.5

V Booleově algebře $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ zjednodušte výrazy.

$(x' \odot y')' = x \oplus y$

$(a \oplus b) \oplus (c \oplus a) \oplus (b \oplus c) = a \oplus a \oplus b \oplus b \oplus c \oplus c = a \oplus b \oplus c$

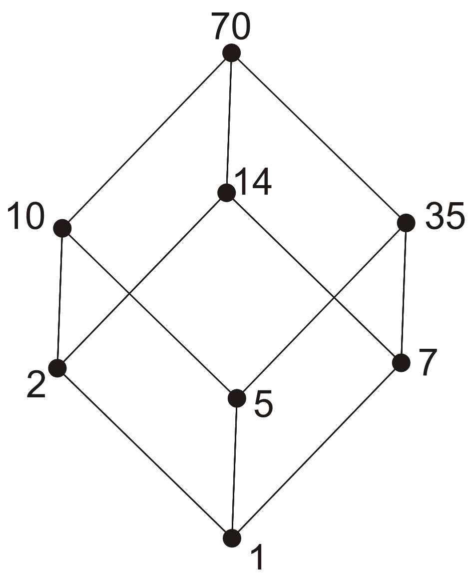
$(x \odot y) \oplus (z \odot x) \oplus (x' \odot y')' = x \oplus (x \odot y) \oplus (z \odot x) \oplus y = x \oplus (x \odot y) \oplus (y \odot x) \oplus (y \odot z) =$
$x \oplus (x \odot z) \oplus y = x \oplus y$

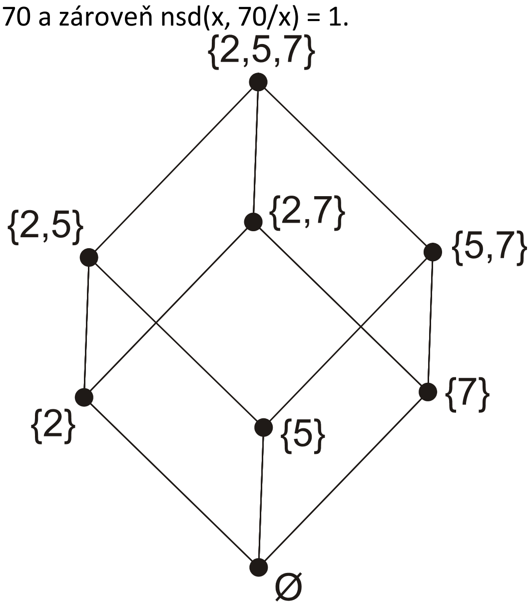
Poslední úprava je dána tím, že ať bude z 1 nebo 0 nebude to mít vliv na výsledek výrazu.

2.8.10

Nechť $X = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$. Položme $x \oplus y = nsn(x, y)$, $x \odot y = nsd(x, y)$, $x' = \frac{70}{x}$ pro všechna x, $y \in X$. Dokažte, že $(X, \oplus, \odot, ', 1, 70)$ je Booleova algebra. Nakreslete její Hasseuv diagram.

$A = \{2,5,7\}$
$Y = 2^A = \{\emptyset, \{2\},\{5\},\{7\},\{2,5\},\{2,7\},\{5,7\},\{2,5,7\}\}$
Protože $(Y, \cup, \cap, ', \emptyset, A)$ je booleovská algebra a je izomorfni s $(X, \oplus, \odot, ', 1, 70)$, tak to znamená, že je booleovská algebra i daný svaz. Svaz je distributivní, protože neobsahuje žádný podsvaz izomorfní s N5 nebo M5. Protože je distributivní, tak je i modulární. Svaz je také komplementární, protože pro všechny $x \in X$ platí $nsn(x, 70/x) = 70$ a zároveň $nsd(x, 70/x) = 1$.

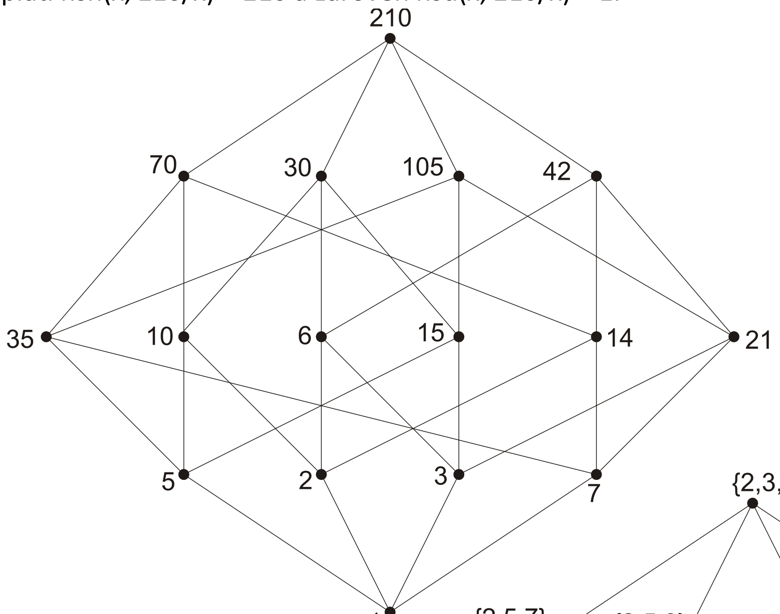


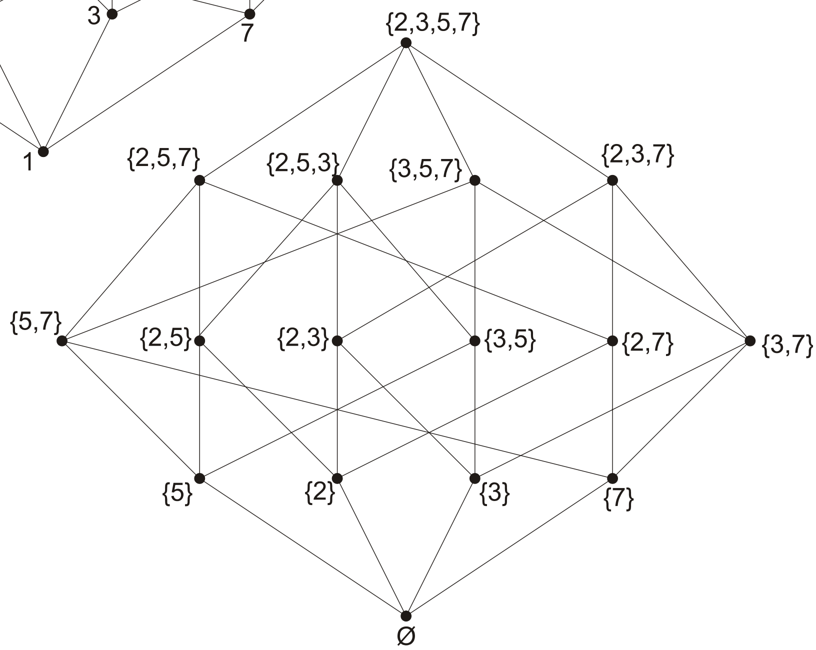


2.8.11

Dokažte, že množina všech dělitelů čísla 210 s vhodnými operacemi tvoří Booleovu algebru. Popište tyto operace a nakreslete její Hasseův diagram.

X = {1, 2, 3, 5, 7, 6, 10, 14, 15, 21, 35, 30, 42, 70, 105, 210}
A = {2,3,5,7}
Y = 2^A = {∅, {2},{3},{5},{7},{2,3},{2,5},{2,7},{3,5},{3,7},{5,7},{2,3,5},{2,3,7},{2,5,7},{3,5,7},{2,3,5,7}}
Svazy (X, $\oplus$,$\odot$,‘ , 1, 210) a (Y, $\cup$, $\cap$, ‘ , ∅, A) jsou izomorfní a oba jsou i booleovskou algebrou. Svaz (X, $\oplus$,$\odot$,‘ , 1, 210) je distributivní, protože neobsahuje žádný podsvaz izomorfní s N5 nebo M5. Protože je distributivní, tak je i modulární. Svaz je také komplementární, protože pro všechny x $\in$ X platí nsn(x, 210/x) = 210 a zároveň nsd(x, 210/x) = 1.





Jméno a Příjmení: Vojtěch Kalčík (xkalci01)	ID: 119943	Téma: 5			1	2	3	Σ

4.2.3

V daném grafu najděte nejkratší cestu z a do z:

a-b-c-f-d-g-z = 14
a-e-c-f-d-g-z = 14

4.3.8

Uvažujte graf z příkladu 3 ve cvičení 4.2. Rozhodněte a dokažte, zda je či není rovinný.

Graf je rovinný. Z toho důvodu, že se jedna hrana, z těch co se kříží, dá vést kolem grafu. Nebo se to dá také dokázat pomocí vzorečku, který říká, že pokud je graf rovinný, tak počet vrcholů - počet hran + počet stěn = 2 -> v tomto případě 8 – 14 + 8 = 2

4.3.9

Uvažujte graf z příkladu 4 ve cvičení 4.2. Rozhodněte a dokažte, zda je či není rovinný.

Graf není rovinný. Z toho důvodu, že se nedá překreslit tak, aby se žádná hrana nekřížila.